Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Окрестность точки



Окрестность точки

Под точкой понимается как действительное число, так и элементы $+\infty$, $-\infty$, ∞.



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$



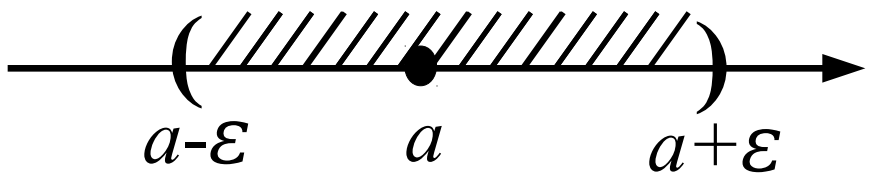
Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$





Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$



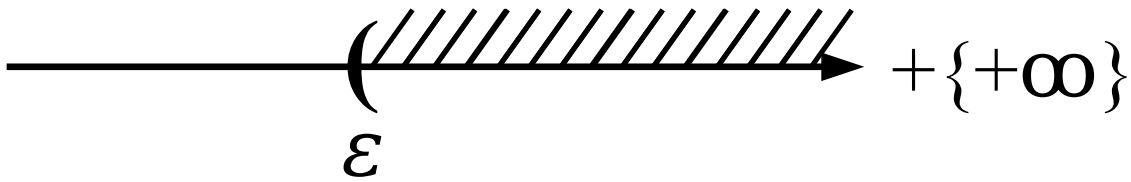
Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$



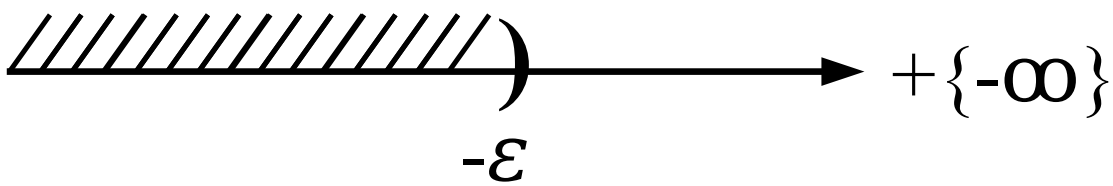
Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

$$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$$



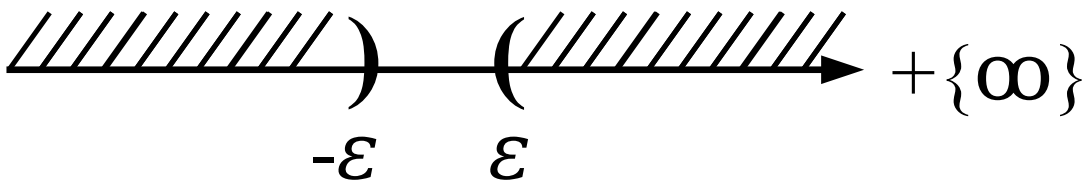
Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

$$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$$





Окрестность точки

ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε.



Окрестность точки

ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε. В этом случае ε просто подразумевается.



Окрестность точки

ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε. В этом случае ε просто подразумевается. Обозначения $U(a, \varepsilon)$ и $U(a)$ эквивалентны.



Окрестность точки

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a, т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \backslash a.$$

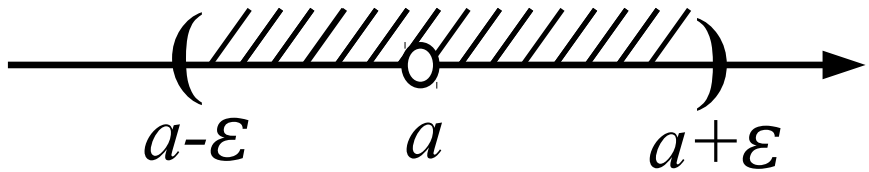


Окрестность точки

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a, т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \backslash a.$$





Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon)$, $\overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$

2) левосторонняя окрестность



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon)$, $\overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$

2) левосторонняя окрестность

$U_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a]$, $\overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a)$



Типы стремления переменной к точке



Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x, которая принимает последовательно значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.



Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x, которая принимает последовательно значения $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ В зависимости от вида последовательности $\{x_n\}$ можно выделить несколько типов стремления переменной x к точке a.



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+ (a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_+ (a, \varepsilon)$.

Обозначение: $x \to a + 0$.



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_+ (a, \varepsilon)$.

Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

$x \to a + 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$.

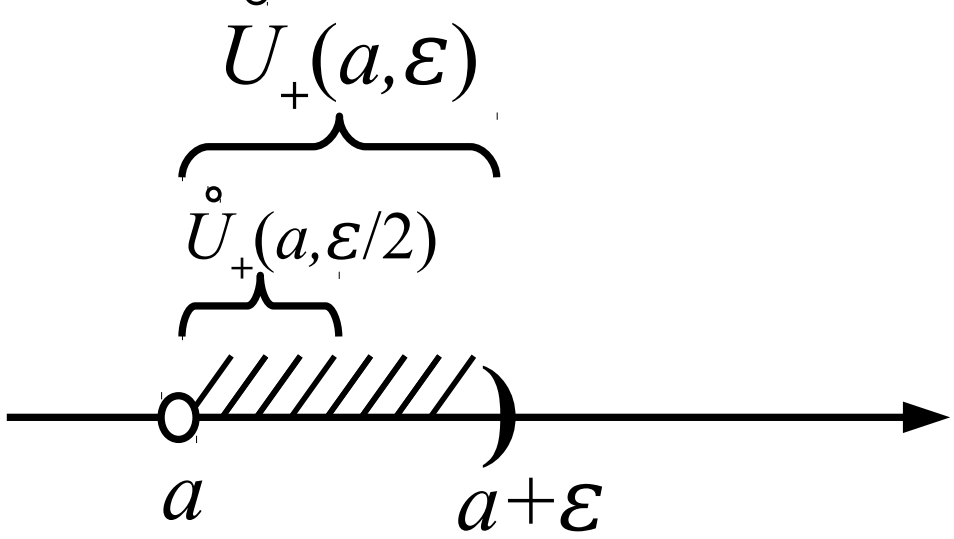
Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

$x \to a + 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$





Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$.

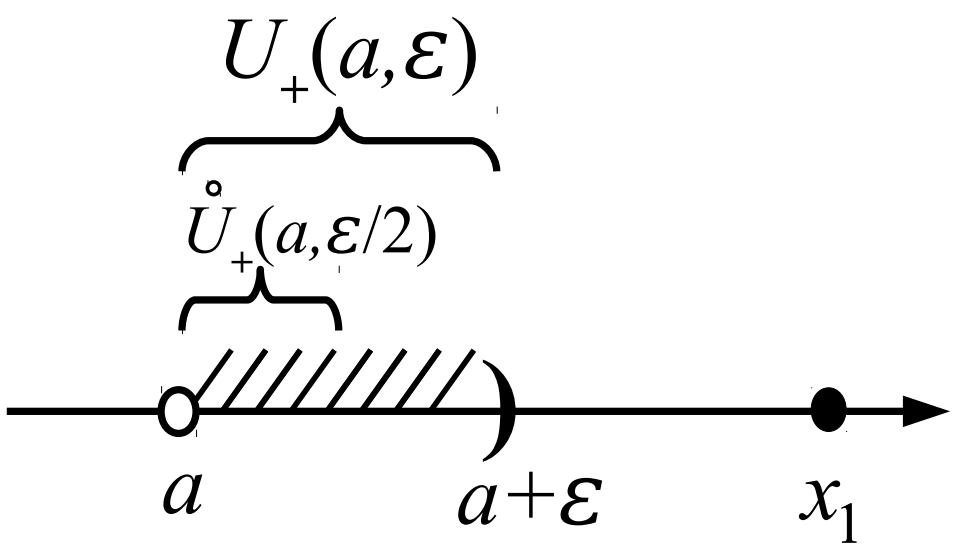
Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

$x \to a + 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$.

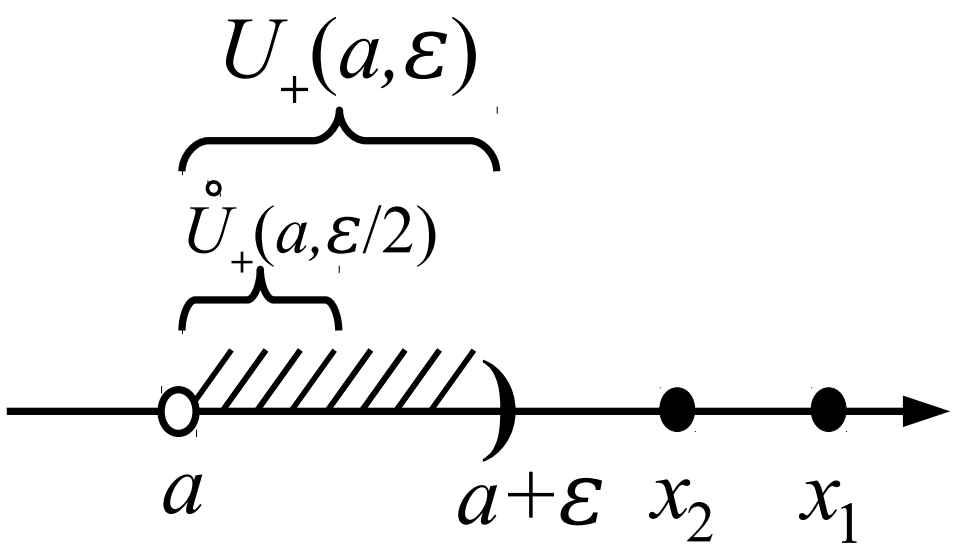
Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

$x \to a + 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$.

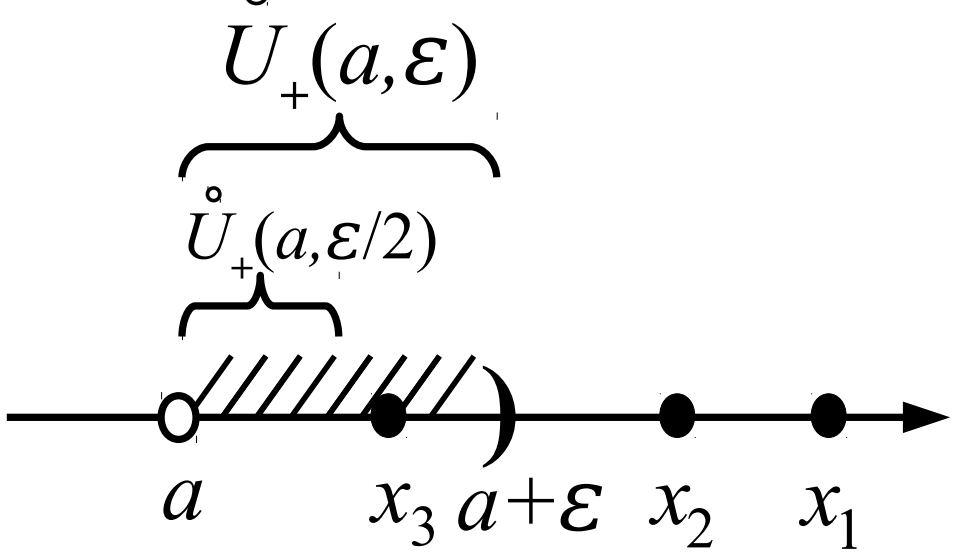
Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

$x \to a + 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$.

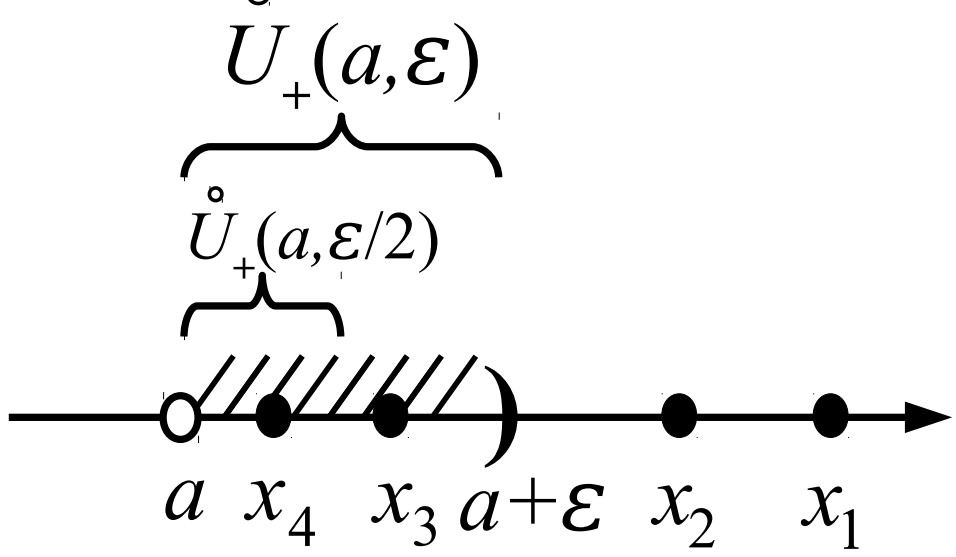
Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

$x \to a + 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$.

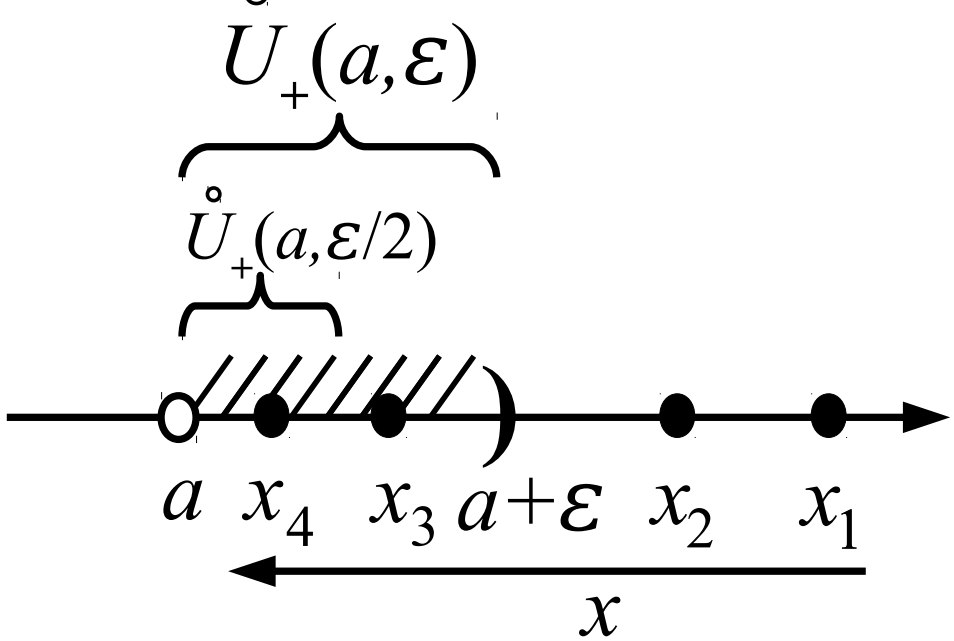
Обозначение: $x \to a + 0$.

Пример:

$x \to a + 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon)$.

Обозначение: $x \longrightarrow a - 0$.



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon)$.

Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

$x \to a - 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$.

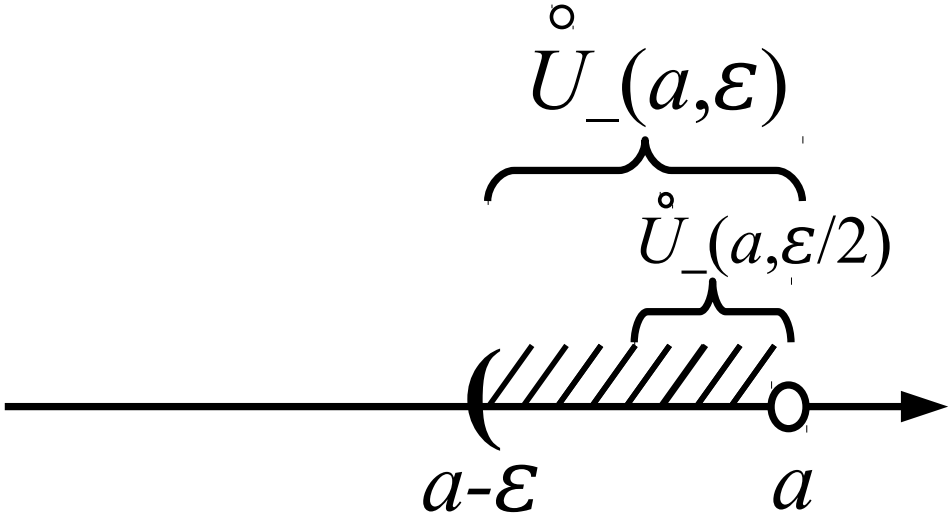
Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

$x \to a - 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$.

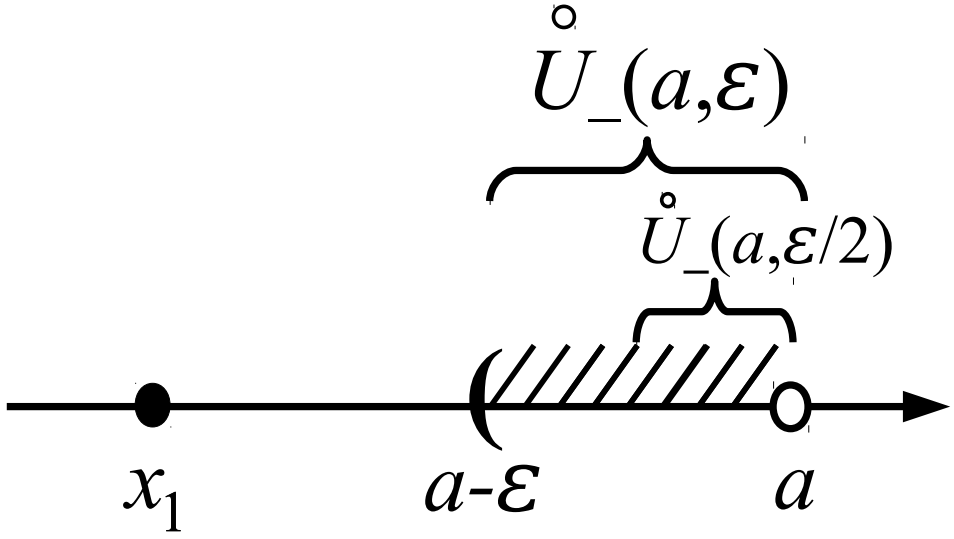
Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

$x \to a - 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$





Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$.

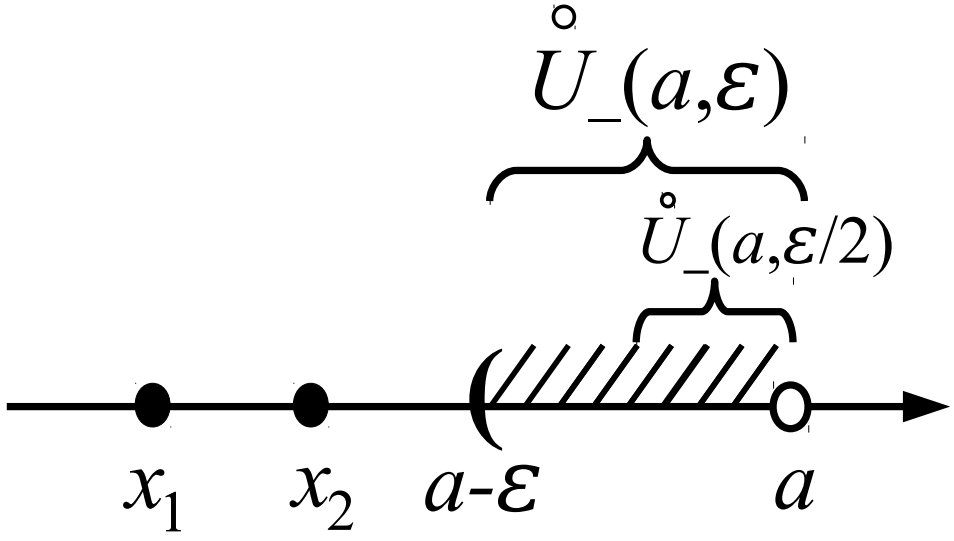
Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

$x \to a - 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$





Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$.

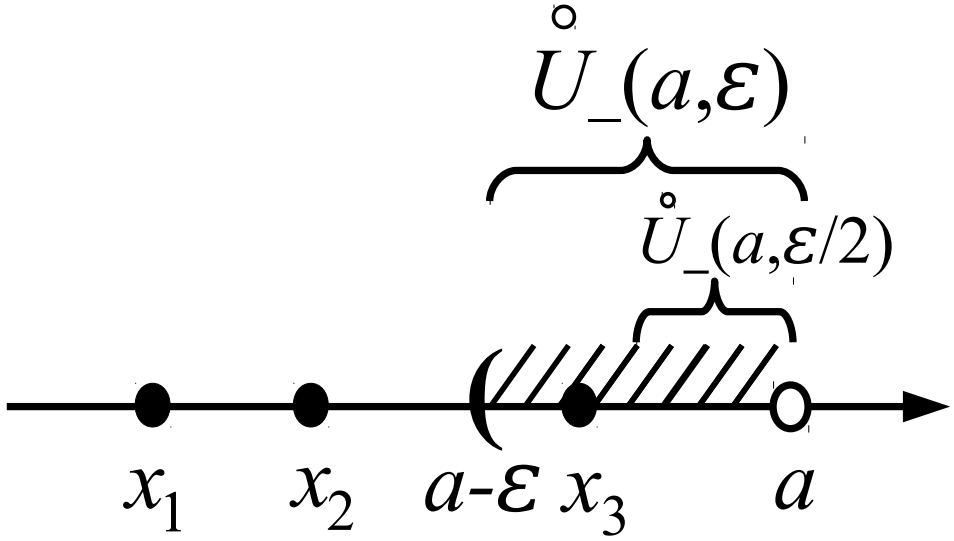
Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

$x \to a - 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$.

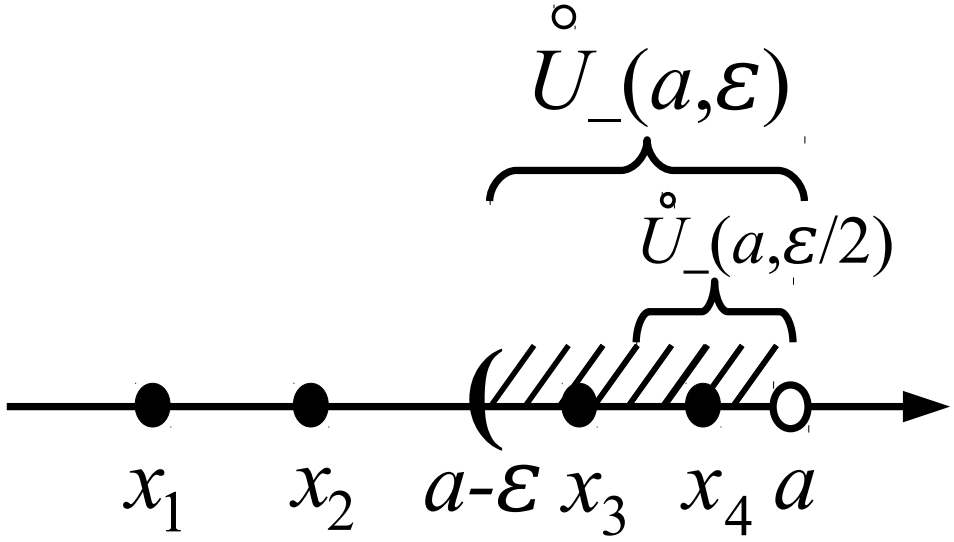
Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

$x \to a - 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$





Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$.

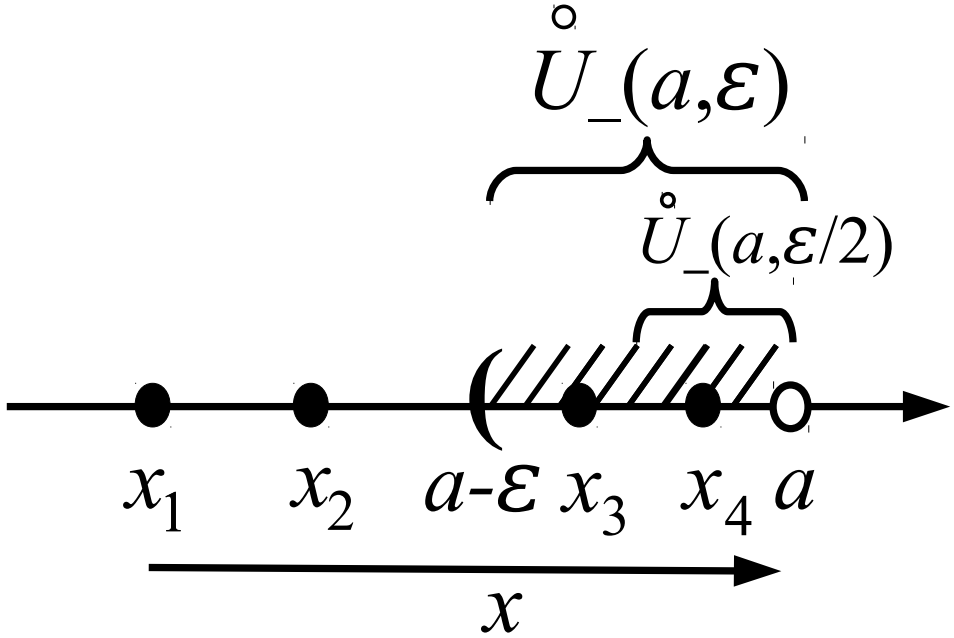
Обозначение: $x \to a - 0$.

Пример:

$x \to a - 0$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$.

Обозначение: $x \longrightarrow a$.



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$.

Обозначение: $x \to a$.

Пример:

$x \to a$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$.

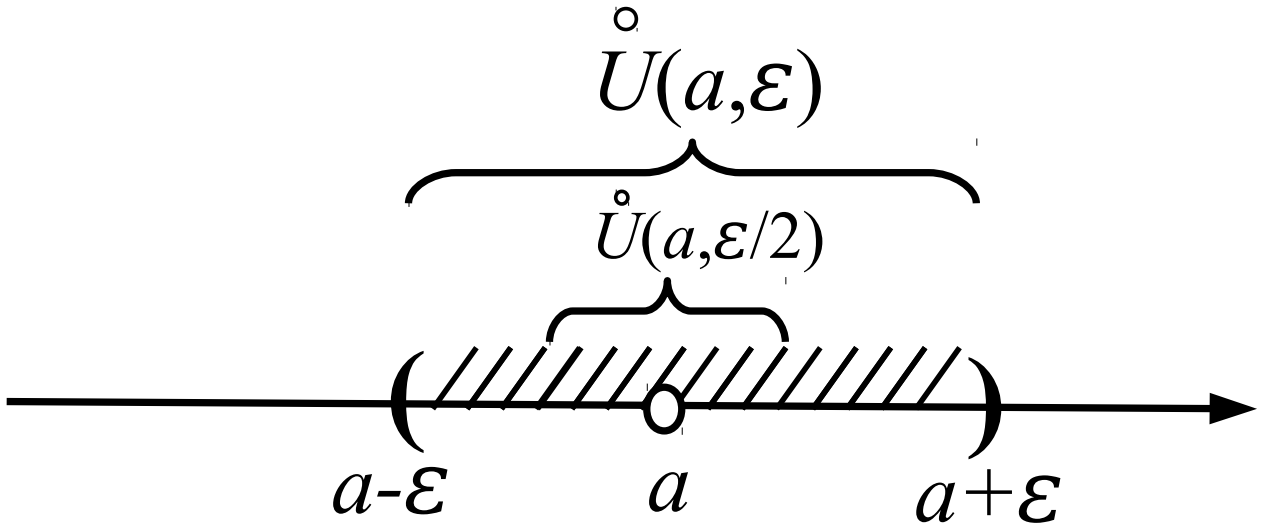
Обозначение: $x \to a$.

Пример:

$x \to a$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$.

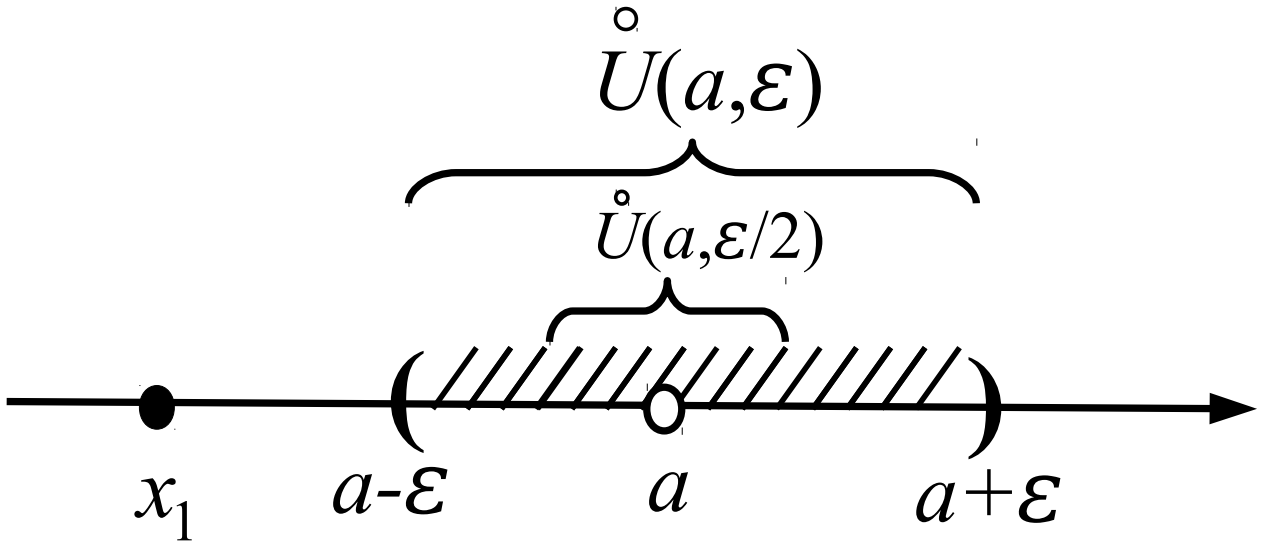
Обозначение: $x \to a$.

Пример:

$x \to a$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$.

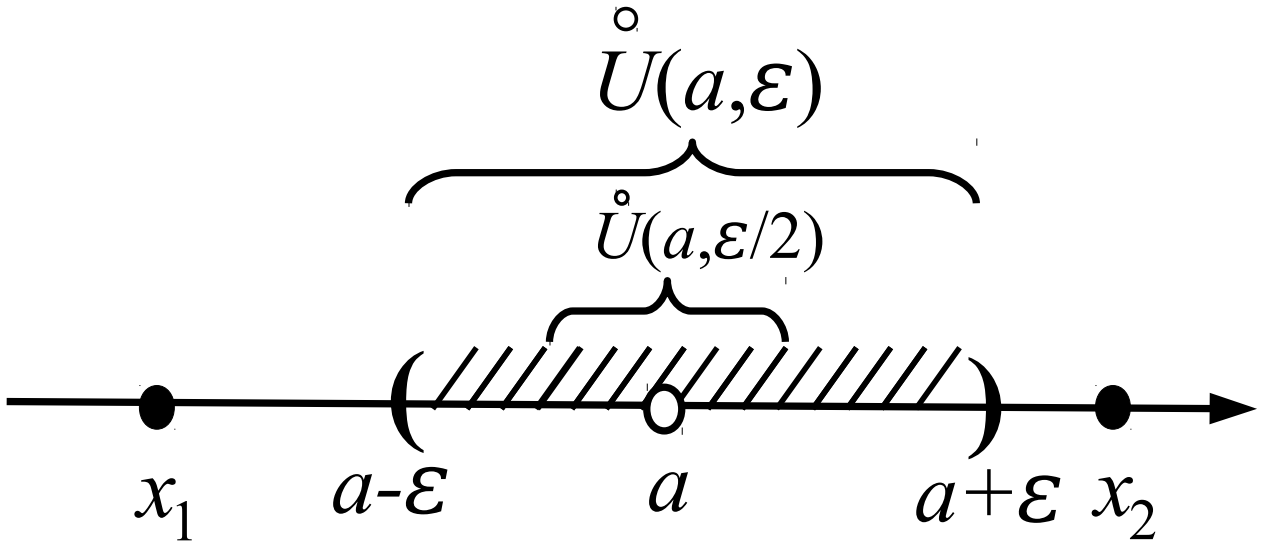
Обозначение: $x \to a$.

Пример:

$x \to a$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$.

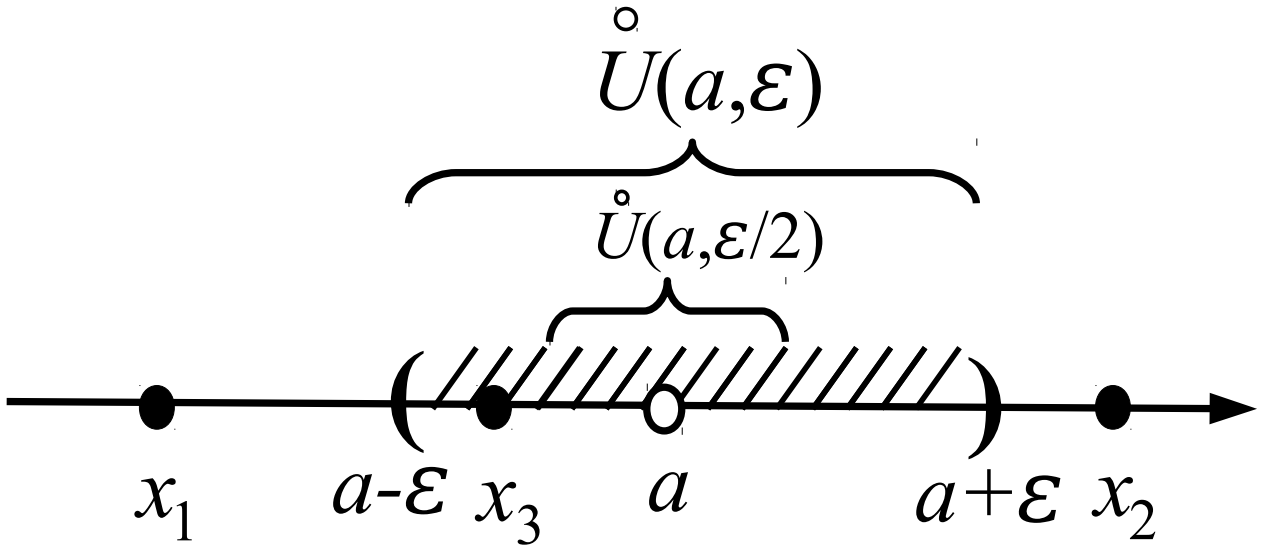
Обозначение: $x \to a$.

Пример:

$x \to a$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$.

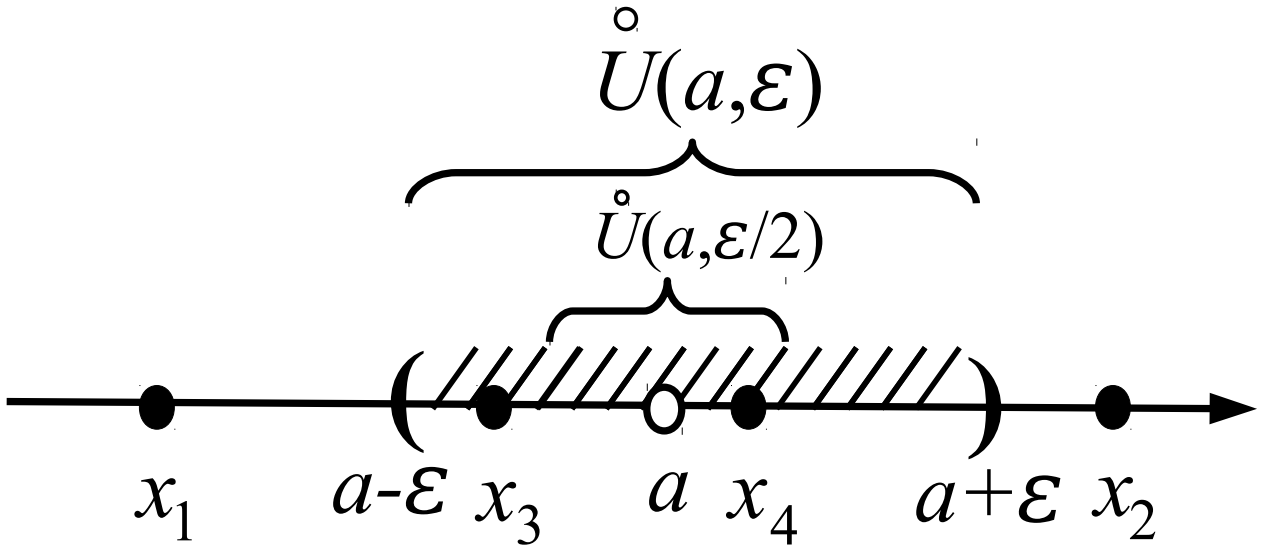
Обозначение: $x \to a$.

Пример:

$x \to a$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$.

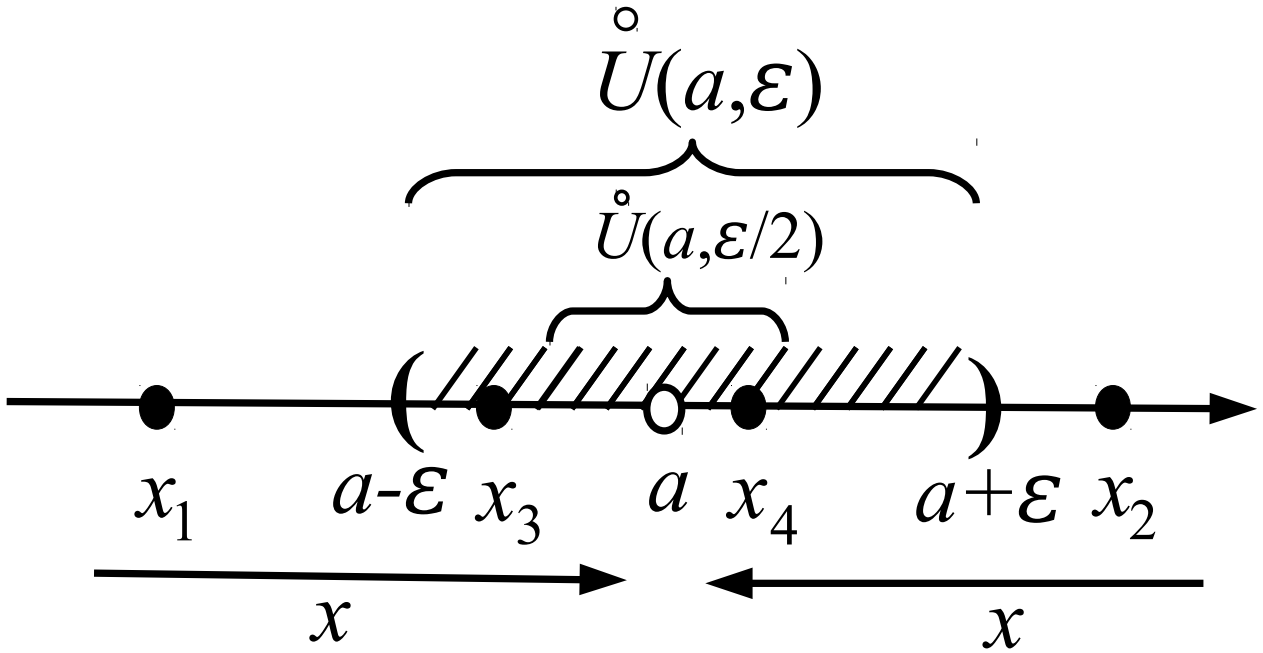
Обозначение: $x \to a$.

Пример:

$x \to a$,

$n(\varepsilon) = 2$,

$n(\varepsilon/2) = 3$



Предел функции



Предел функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и пусть $x \longrightarrow a$,



Предел функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и пусть $x \longrightarrow a$, т.е. x последовательно принимает значения x_1, x_2, ..., x_n, ..., которые с ростом n приближаются к точке a.



Предел функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и пусть $x \longrightarrow a$, т.е. x последовательно принимает значения x_1, x_2, ..., x_n, ..., которые с ростом n приближаются к точке a. Этой последовательности соответствует последовательность значений функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, ..., которая, в свою очередь, с ростом n приближается к некоторой точке b.



Предел функции

Определение
(в терминах последовательностей)
Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.



Предел функции

Определение

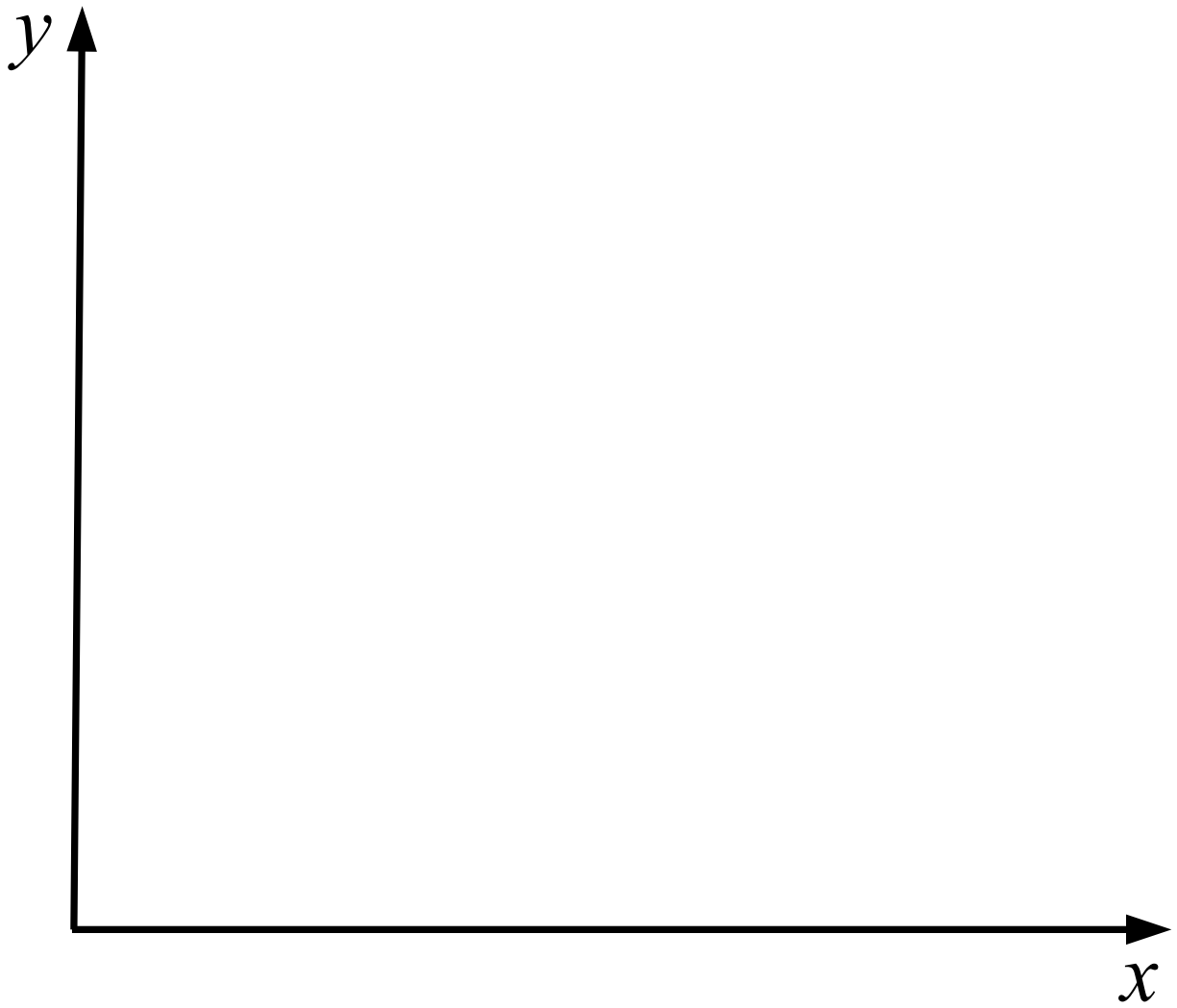
(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

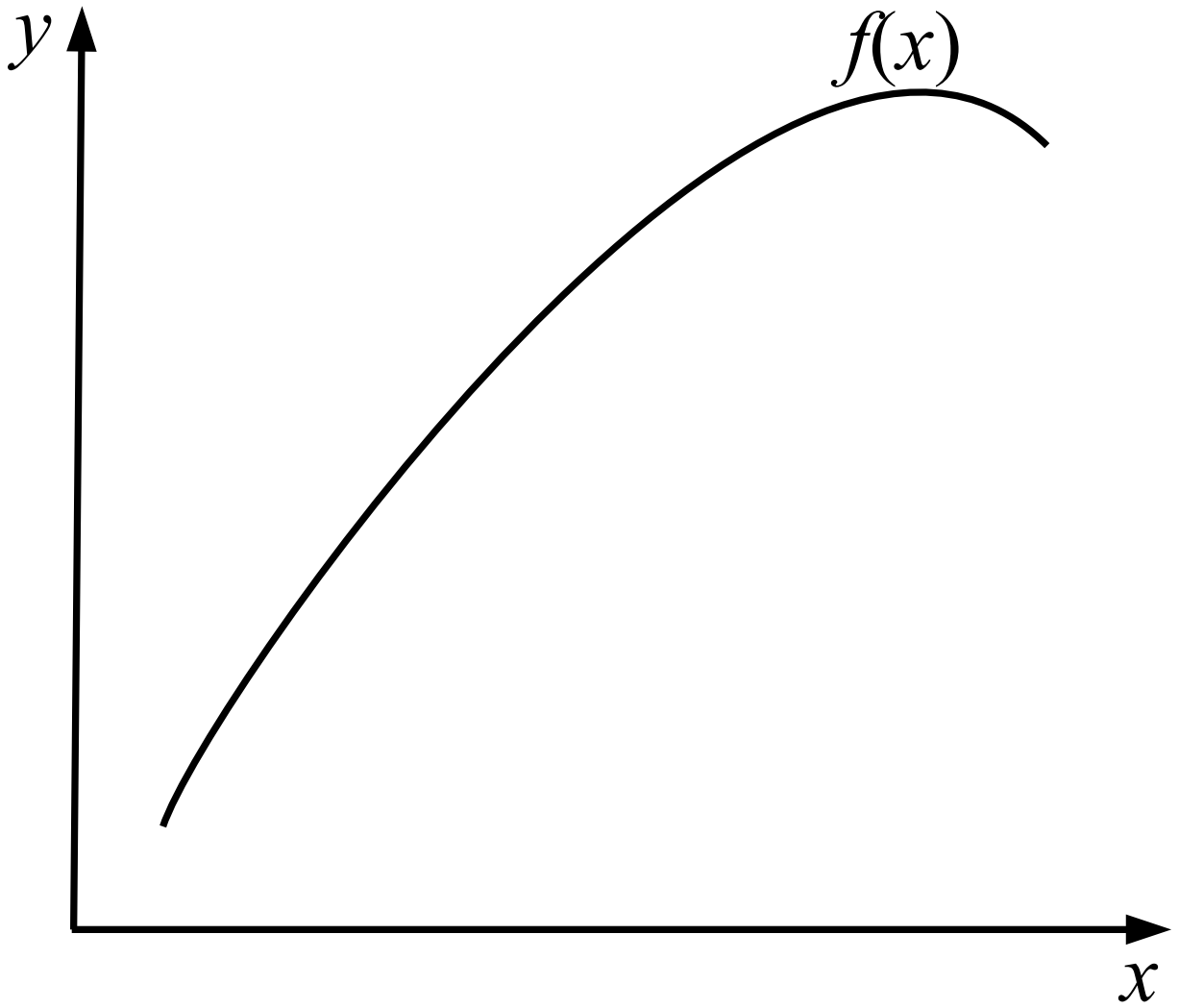
Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.



Предел функции

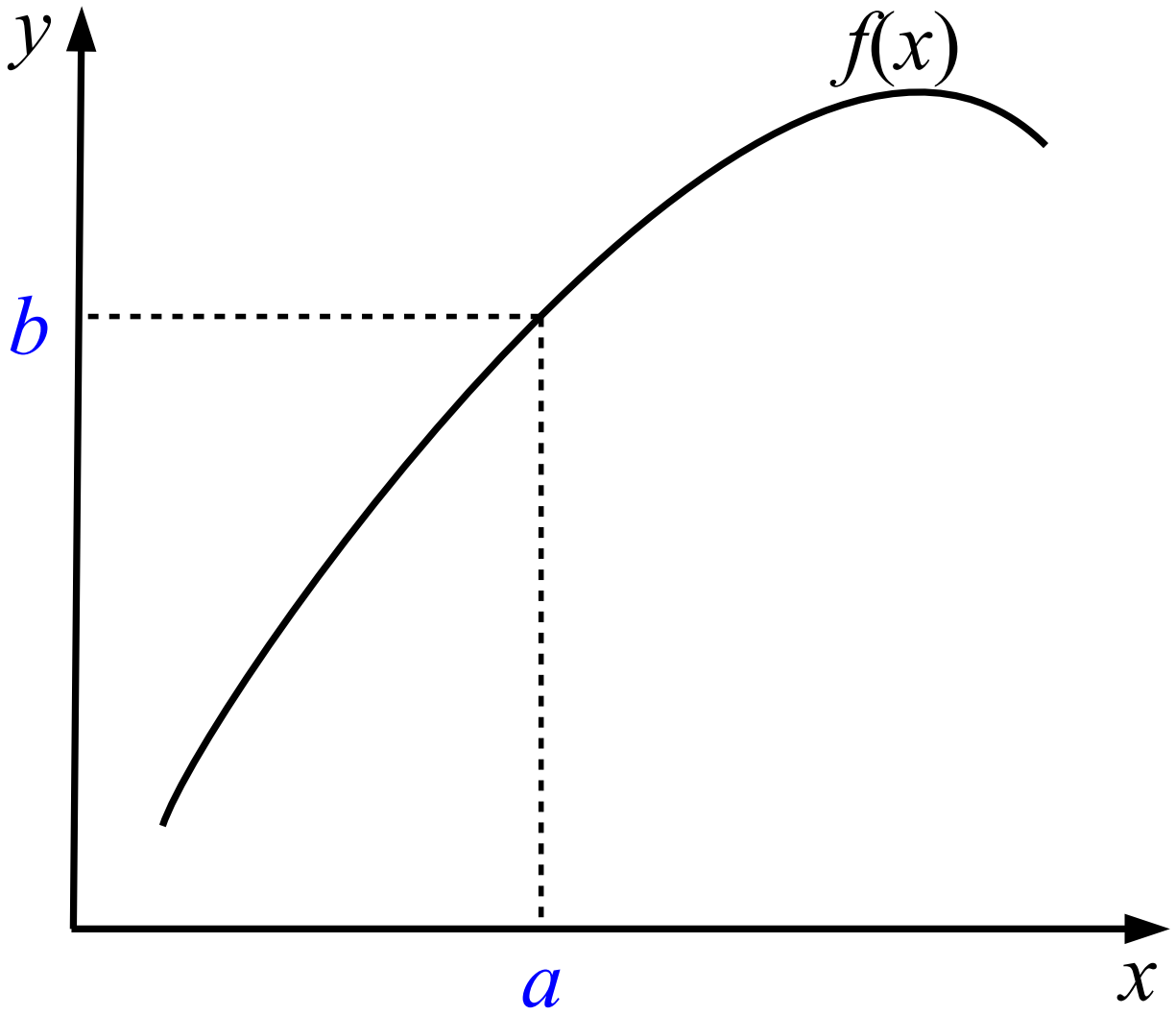


Предел функции

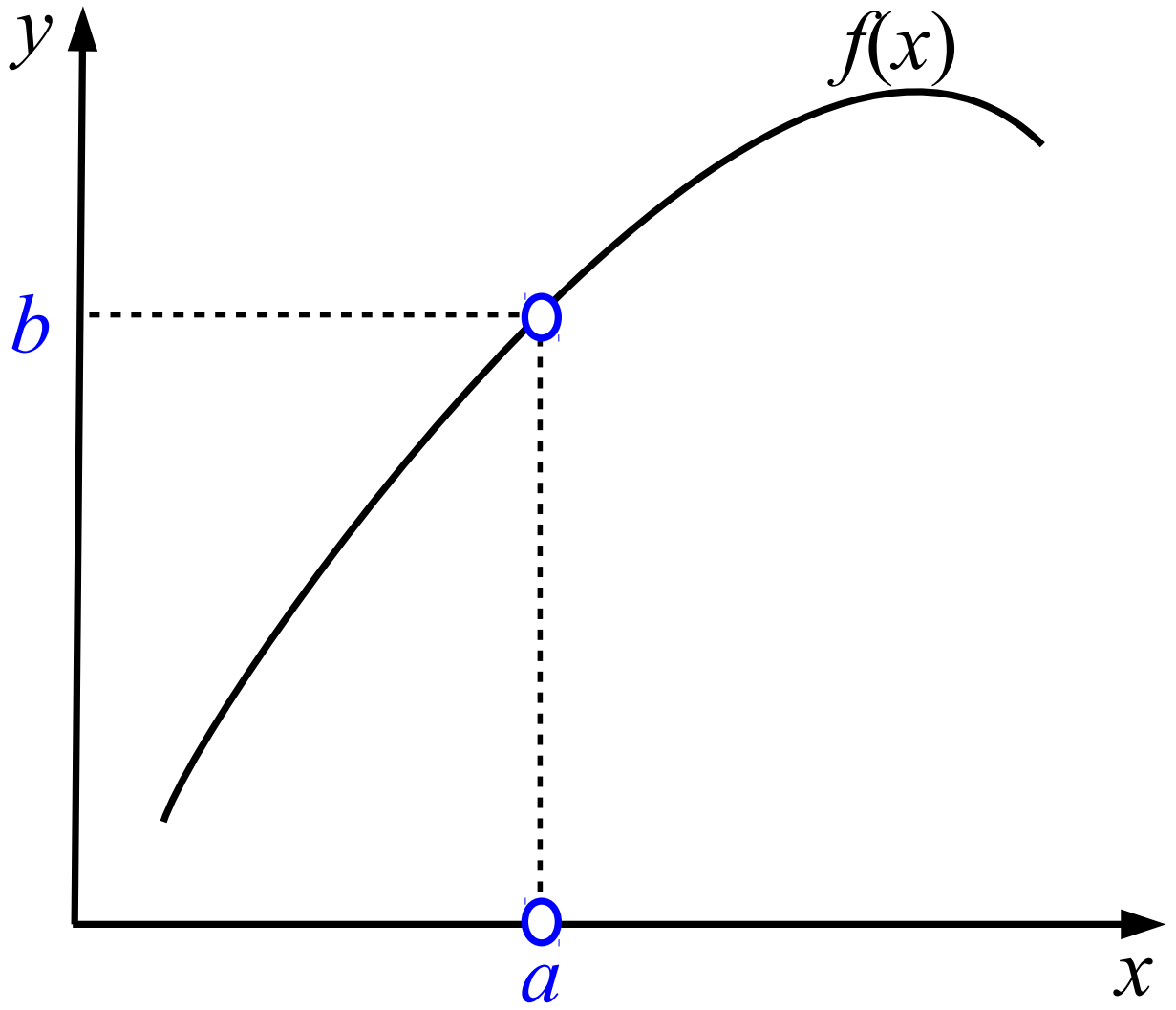




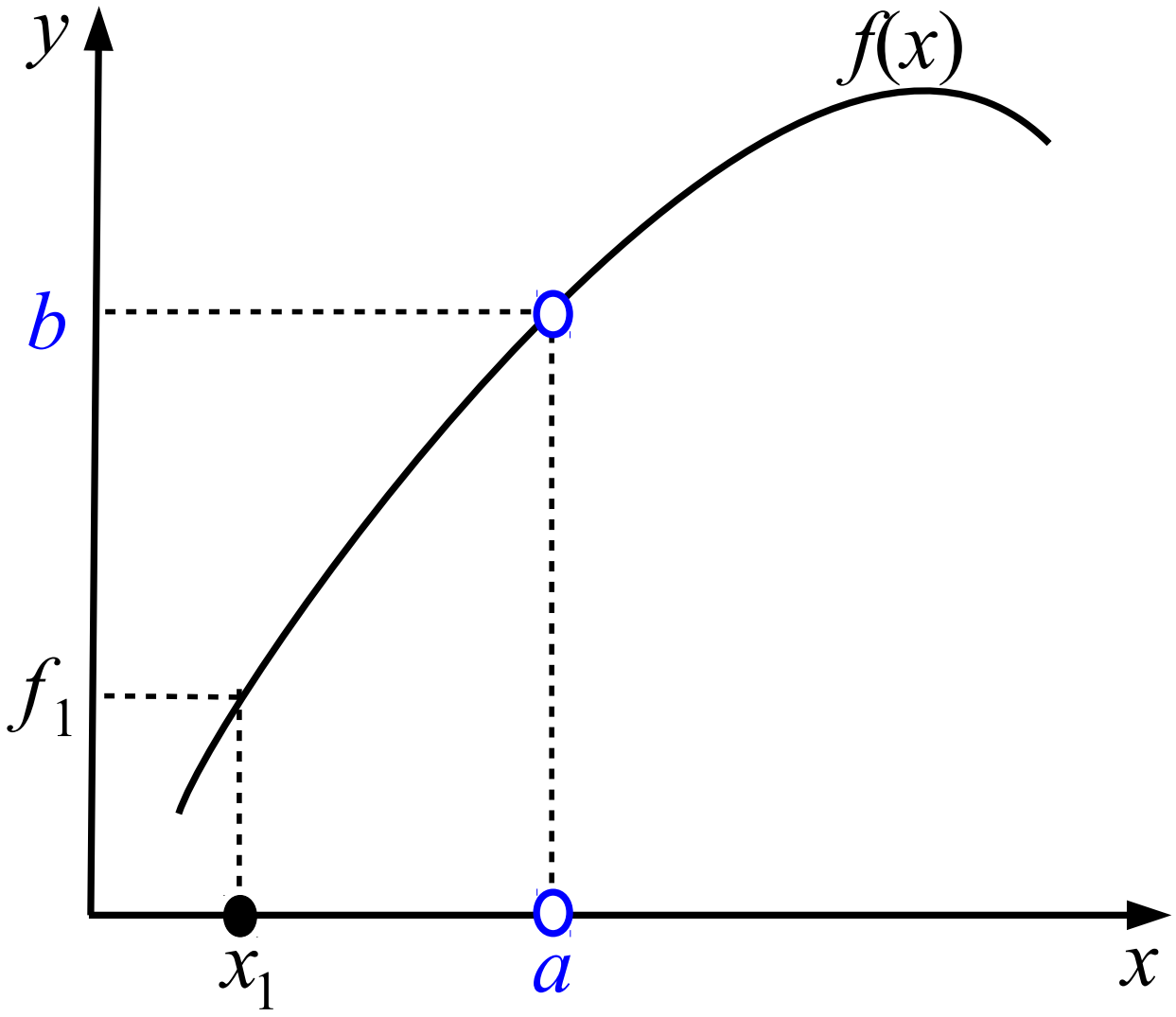
Предел функции



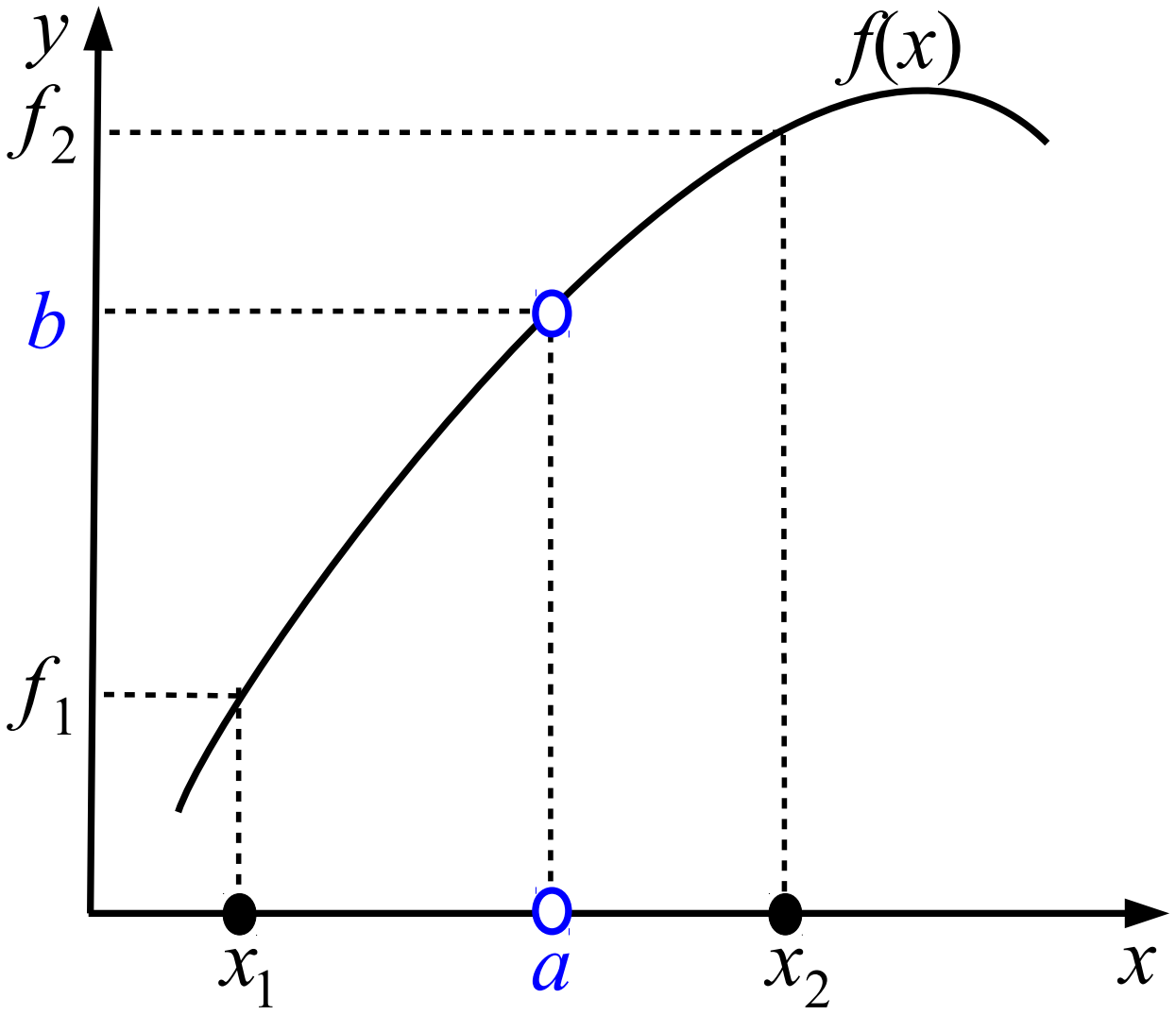
Предел функции



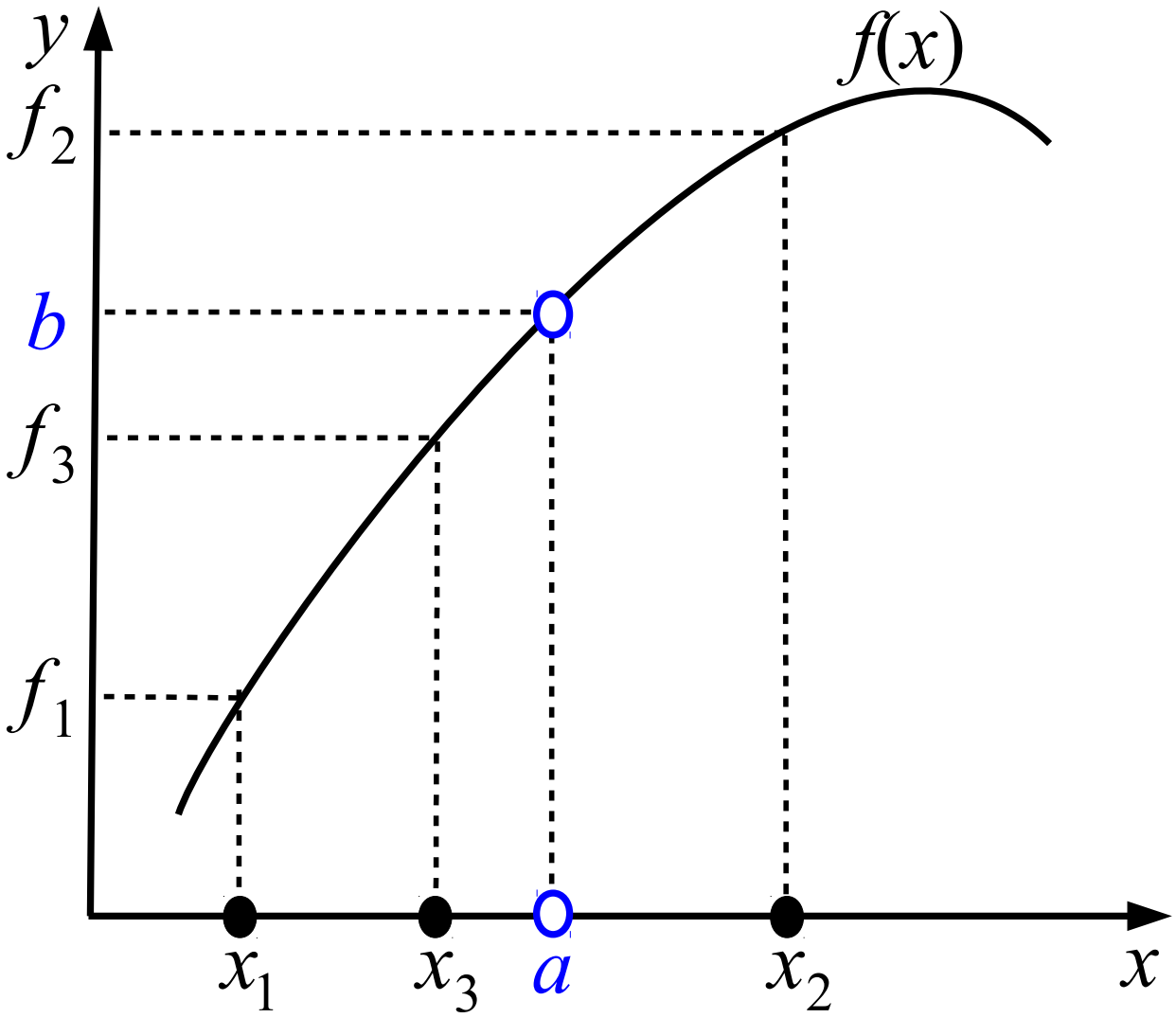
Предел функции



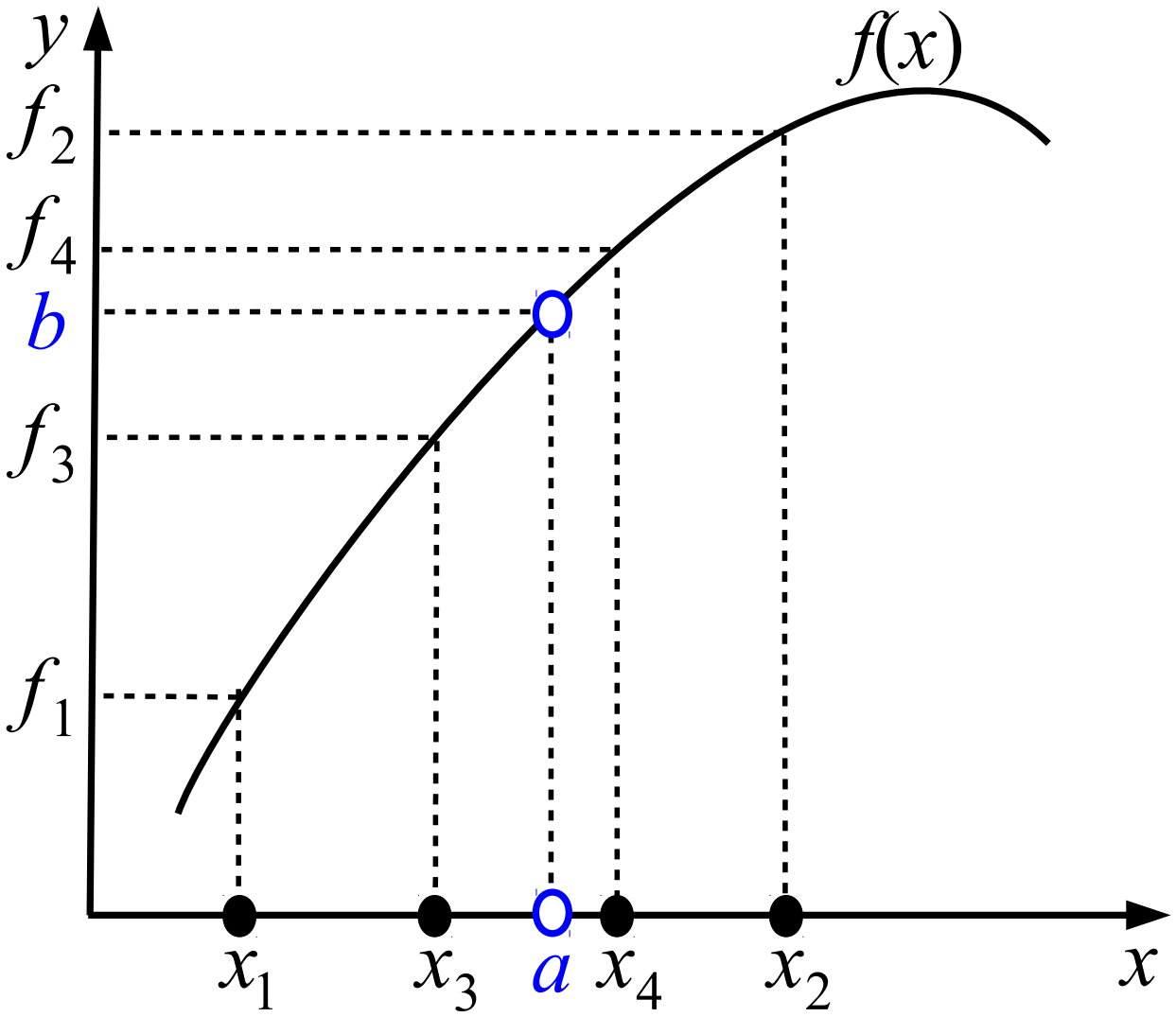
Предел функции



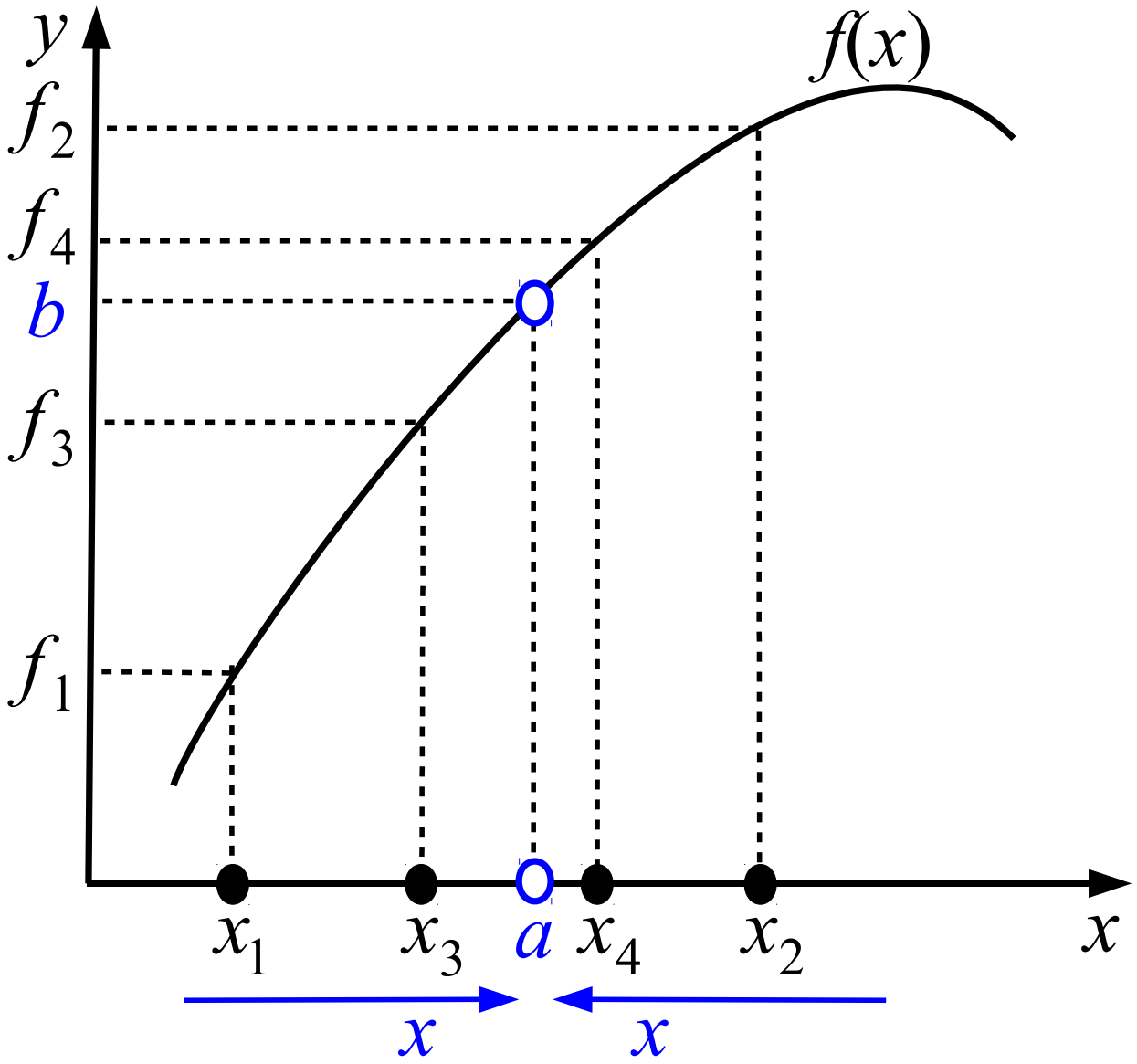
Предел функции



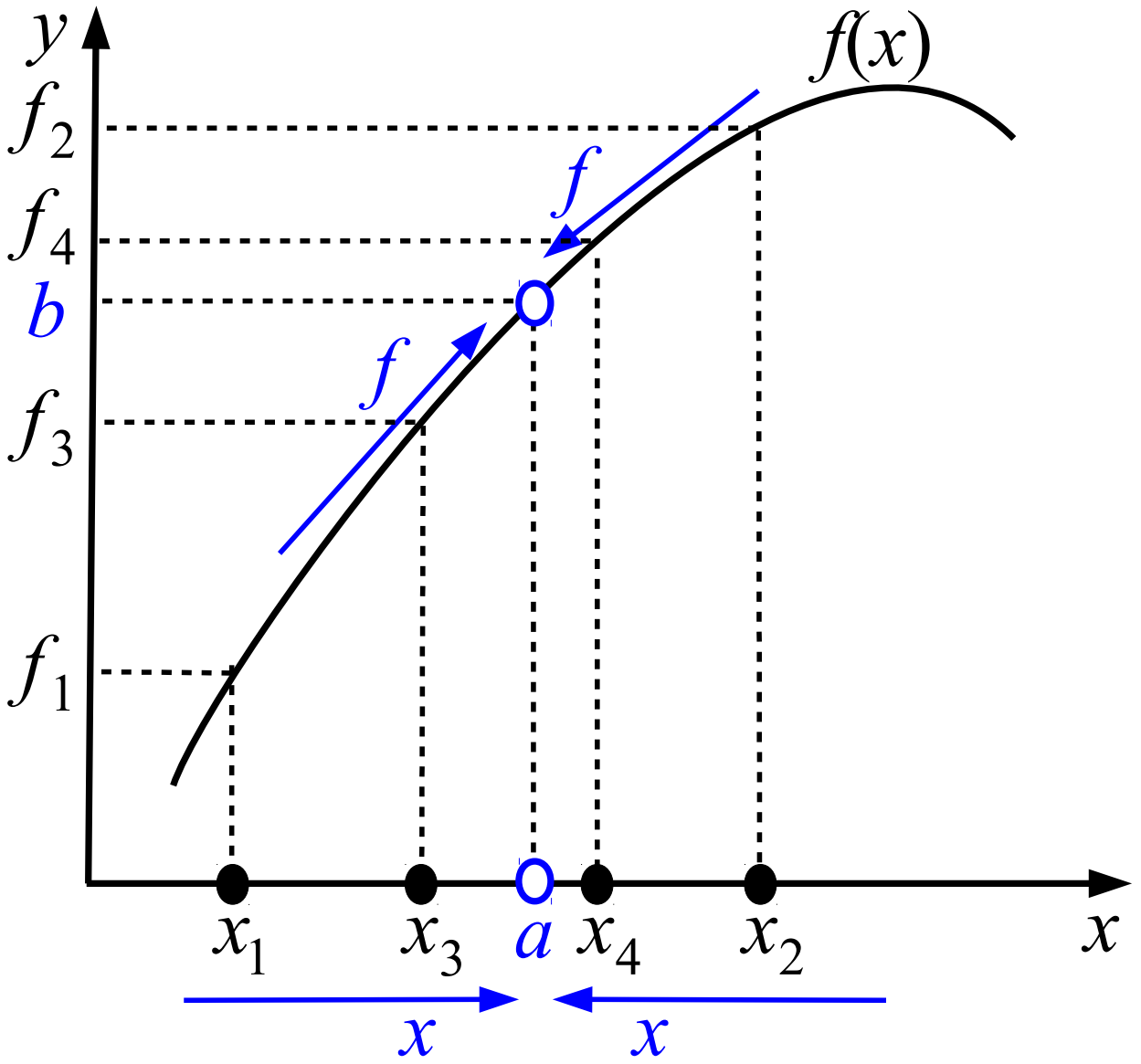
Предел функции



Предел функции



Предел функции



Предел функции

В данном определении точки a и b могут быть конечными числами или бесконечностями. Если a - конечное число, то предел также часто называют **двусторонним пределом**.



Предел функции

В данном определении точки a и b могут быть конечными числами или бесконечностями. Если a - конечное число, то предел также часто называют **двусторонним пределом**.

Сформулируем еще два **эквивалентных** определения предела, которые используются при доказательстве теорем.



Предел функции

Определение

(в терминах окрестностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\forall U(b,\varepsilon)\,\exists\,\overset{\circ}{U}(a,\delta)\,\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)\colon f(x) \in U(b,\varepsilon).$$



Предел функции

Расшифровка математических символов:



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - для любой точки x из этой окрестности



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

: - выполняется



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

: - выполняется

$f(x) \in U(b, \varepsilon)$ - значение функции f в точке x принадлежит ε-окрестности точки b



Предел функции

Определение

(в терминах неравенств для конечных точек)

Конечная точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \longrightarrow a$, где a - конечная точка, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta: \\ |f(x) - b| < \varepsilon$$



Предел функции

Расшифровка математических символов:



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ

: - выполняется



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ

: - выполняется

$|f(x) - b| < \varepsilon$ - $|f(x) - b|$ меньше ε



Арифметические свойства пределов



Арифметические свойства пределов

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то



Арифметические свойства пределов

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$



Арифметические свойства пределов

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$
2) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$



Арифметические свойства пределов

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$
2) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$
3) $\lim\limits_{x \to a} (f(x)/g(x)) = b/c$, если $c \neq 0$



Односторонние пределы



Односторонние пределы

Определение

(в терминах окрестностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** при $x \to a$, если

$$\forall U(b,\varepsilon)\ \exists\ \overset{\circ}{U}_-(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_-(a,\delta):$$
$$f(x) \in U(b,\varepsilon)$$



Односторонние пределы

Определение

(в терминах окрестностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** при $x \to a$, если

$$\forall U(b,\varepsilon)\ \exists\ \overset{\circ}{U}_-(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_-(a,\delta):\quad f(x) \in U(b,\varepsilon)$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b.$



Односторонние пределы

Определение

(в терминах окрестностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** при $x \to a$, если

$$\forall U(b,\varepsilon)\ \exists\ \overset{\circ}{U}_+(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_+(a,\delta):$$
$$f(x) \in U(b,\varepsilon)$$



Односторонние пределы

Определение

(в терминах окрестностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** при $x \to a$, если

$$\forall U(b,\varepsilon)\ \exists\ \overset{\circ}{U}_+(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_+(a,\delta):$$
$$f(x) \in U(b,\varepsilon)$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b.$



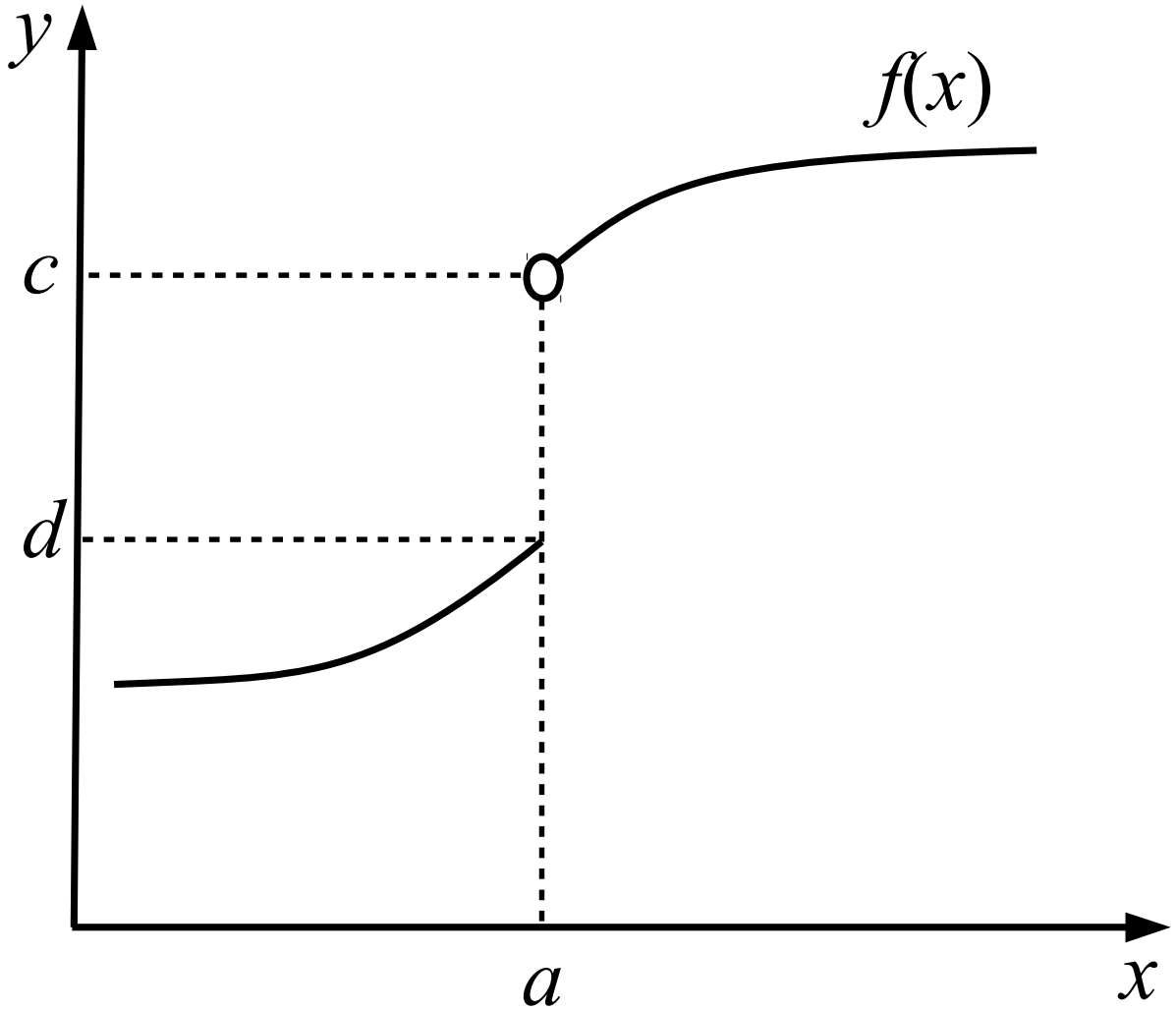
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



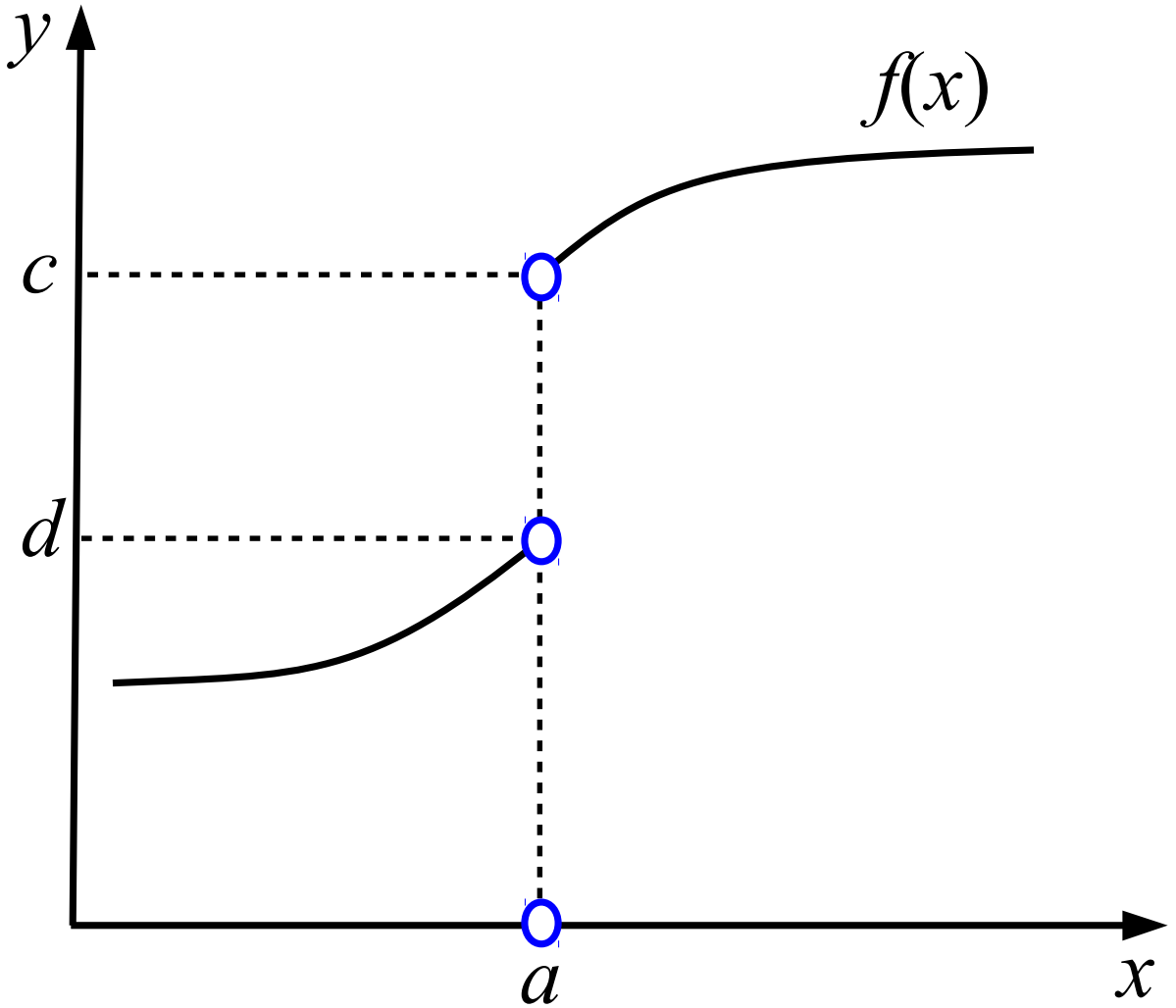
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



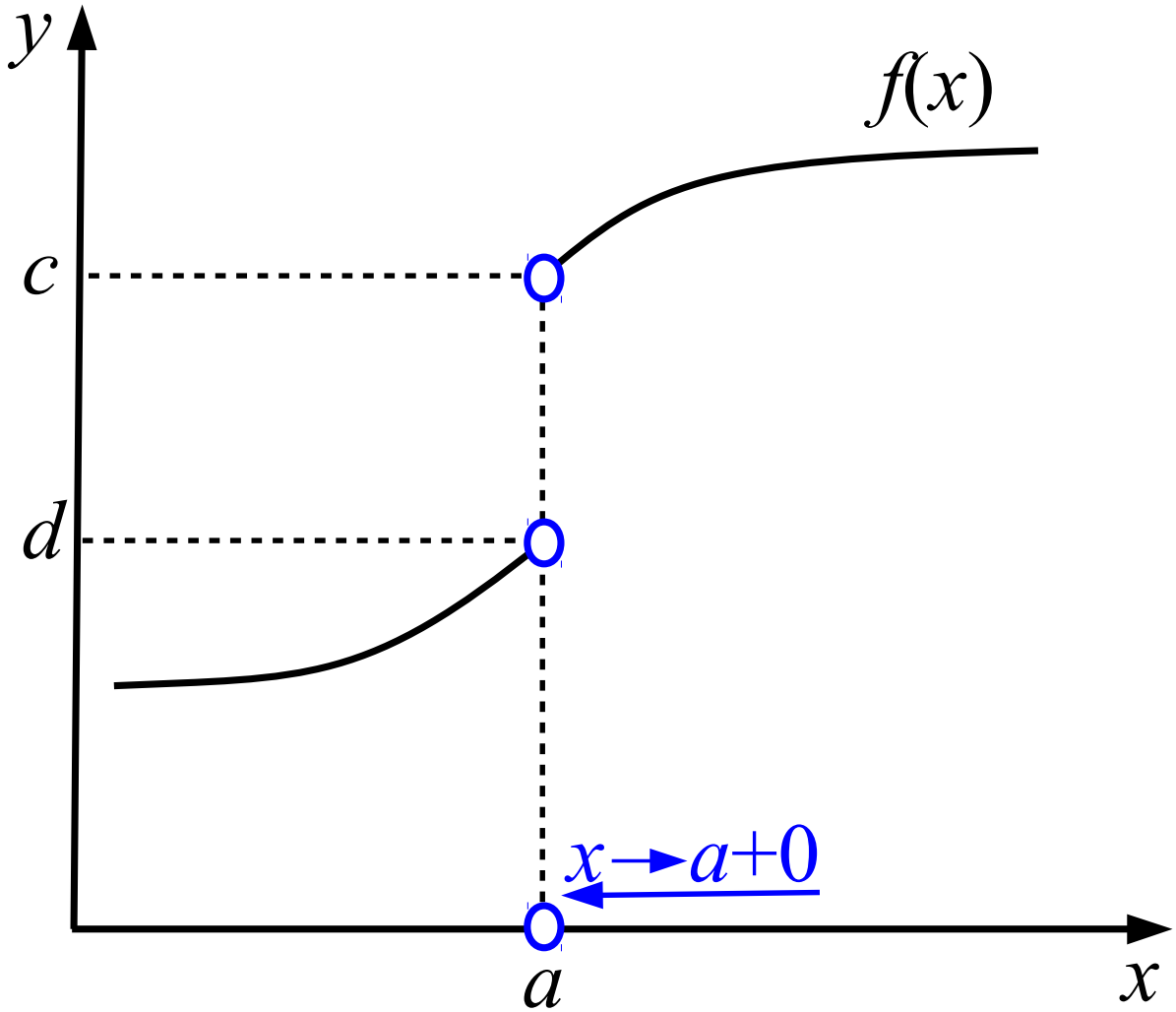
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



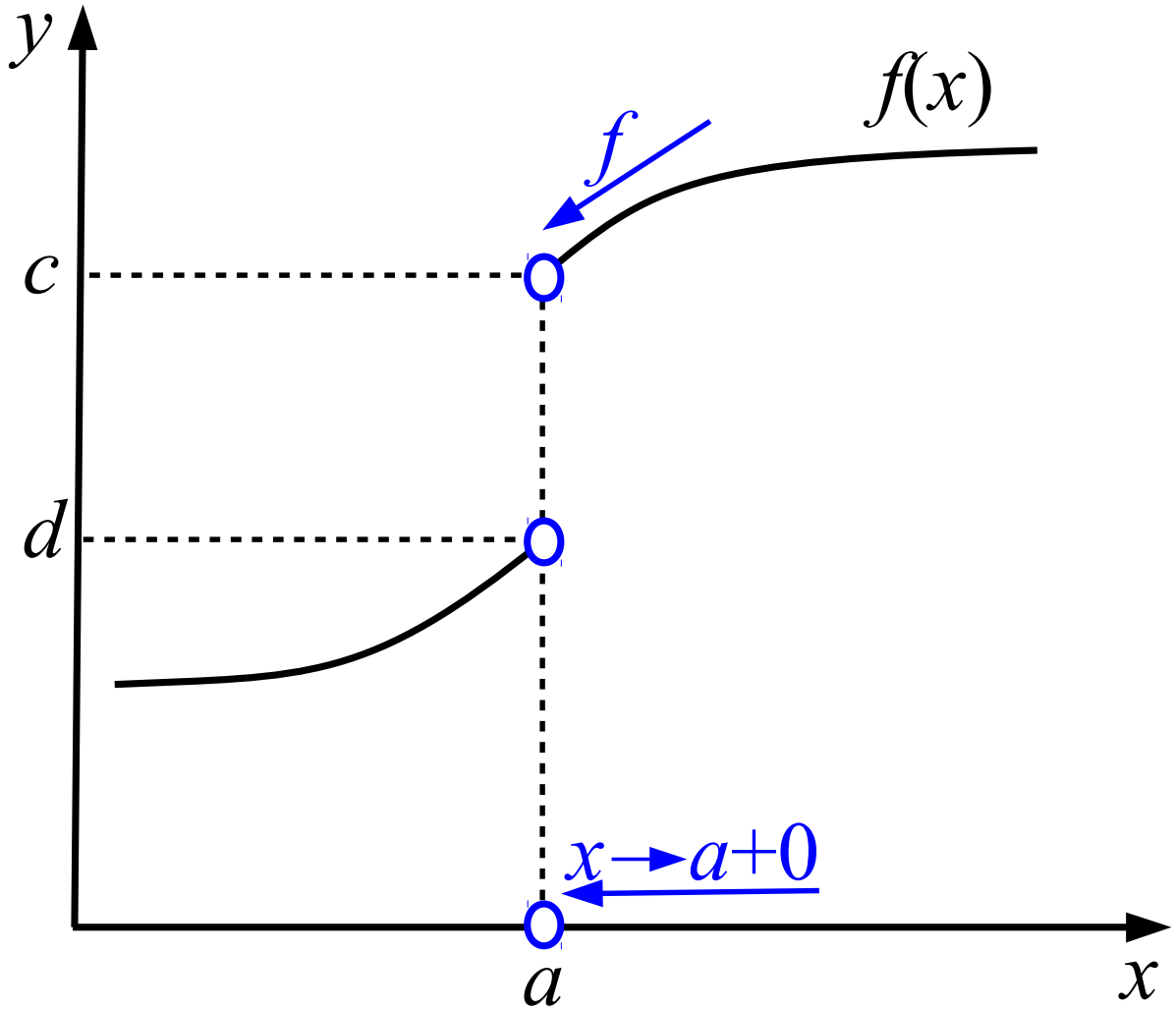
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



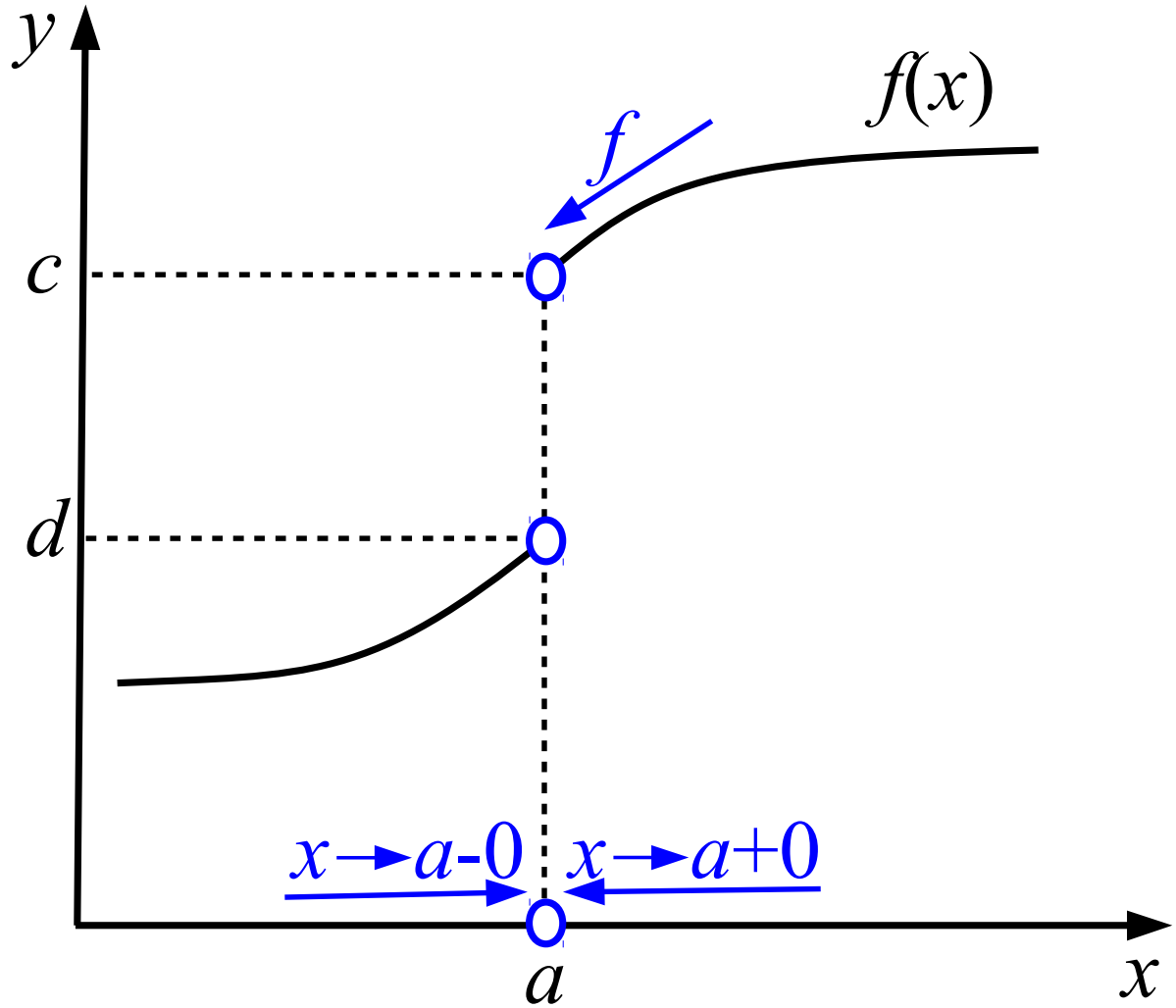
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



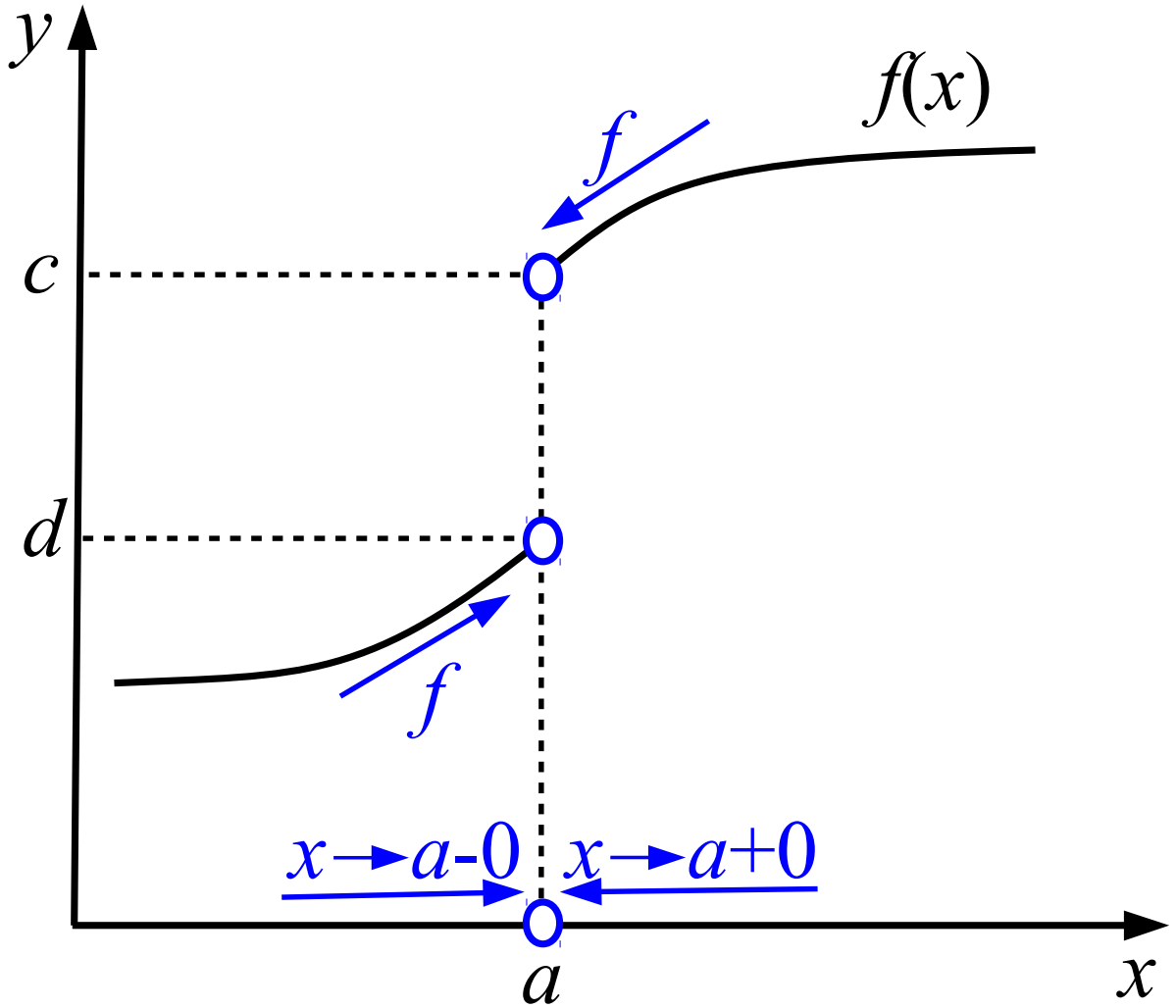
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



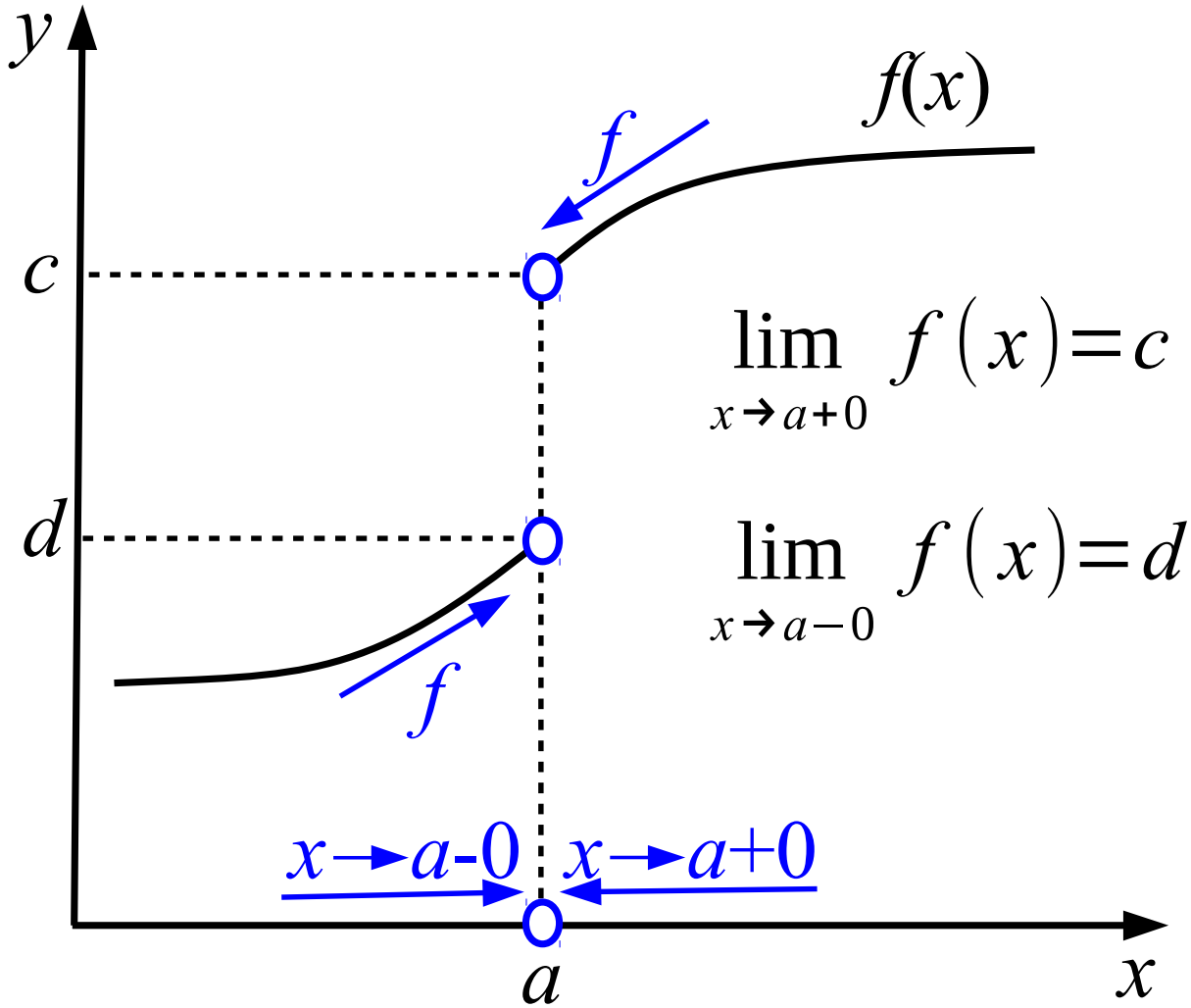
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



$$\lim_{x \to a+0} f(x) = c$$

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = d$$

Односторонние пределы

Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)



Односторонние пределы

Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)
Функция $f(x)$ имеет в точке a двусторонний предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы и они равны, причем их общее значение является значением двустороннего предела.

